Blatt6-Uebungen_Integralrechnungen

Mittwoch, 21. Februar 2024 21:27

Blatt6-Uebungen...

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

$\int 4\,dx = 4x + c$

Aufgabe 1

a) $\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$

b) $\int (x^3 + 2x - 4)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x + c$

c) $\int \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x\right)dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$

d) $\int (e^x + x^2)\,dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$

e) $\int (e^{2x} + 3)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x + c$

f) $\int (2xt^2 + 2xt - 4)\,dt = \frac{2}{3}xt^3 + xt^2 - 4t + c$

Faktor Faktor

g) $\int (\cos(x) - e^{-x} + 1)\,dx = \sin(x) + e^{-x} + x + c$

h) $\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + c$

i) $\int e^{2x+3}\,dt = e^{2x+3}\cdot t + c$

Zahl

j) $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$

k) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

l) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

Aufgabe 2

Swimmingpool

Ein quaderförmiger Swimmingpool mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt.
Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft beschrieben durch die Zulaufratenfunktion mit

$f(t)=t^3-13t^2+40t;\quad 0\le t\le 9$

$\frac{m^3}{h}$ 0 9 h

(f(t) in m³ pro Stunde, t in Stunden)

Wolfram-Alpha

a) Gib die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu noch abläuft, und berechne die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

b) Skizziere den Graphen der Zulaufratenfunktion f.

Schriftlich → c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Pool?

Wolfram-Alpha

d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m^3 beträgt.

$\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^3 = \frac{1}{4}3^4 - \frac{13}{3}\cdot 3^3 + 20\cdot 3^2 = 83{,}25\ m^3$

$V_3 = \underbrace{4}_{V_0 \text{ Anfangsbestand}} + \underbrace{\int_0^3 f(t)\,dt}_{83{,}25} = 87{,}25\ m^3$ (0,1·5·8)

18:14 Freitag 23. Feb.

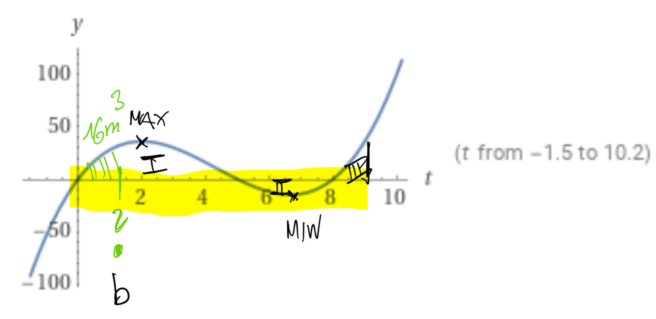
t^3-13t^2+40t

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input

$t^3 - 13t^2 + 40t$

Plots



(t from −1.5 to 10.2)

Roots Nullstellen

$t = 0$ h

$t = 5$ h

$t = 8$ h

Local maximum

$\max\{t^3 - 13t^2 + 40t\} = 36$ at $t = 2$

Local minimum

$\min\{t^3 - 13t^2 + 40t\} = -\frac{400}{27}$ at $t = \frac{20}{3}$

Integrate t^3-13t^2+40t From t=0 to t=5

Definite integral

I $\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$ Zulauf

Integrate t^3-13t^2+40t From t=5 to t=8

Definite integral

II $\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = -\frac{117}{4} = -29.25$ Ablauf

Integrate t^3-13t^2+40t From t=8 to t=9

Definite integral

III $\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$ Zulauf

d) $V_0 + \int_0^9 f(t)\,dt = 4 + 101{,}247 \approx 105{,}25\ m^3$

$V = l\cdot b\cdot h$

$105{,}25 = 8\cdot 5\cdot h$

$\frac{105{,}25}{8\cdot 5} = h$

VS

f) $\left|\int_0^5\right| + \left|\int_5^8\right| + \left|\int_8^9\right| = 159{,}75\ m^3$

g) $\int_0^b f(t)\,dt = 16$

$\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^b = 16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - (0) = 16 \quad |-16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - 16 = 0$ Nullstellenproblem!

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2$

⇒ Wolfram-Alpha ~~$b = -0{,}82$~~ oder $b = 1{,}0036$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Integrale durch partielle Integration.

b) $\int x^2 \sin(3x)\,dx$ c) $\int \sin^2(x)dx$

a) $\int x\, e^{2x}\,dx$

b) $\int x^2\cdot\sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}\cos(3x)\cdot x^2 - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\cdot 2x\,dx$

Restintegral noch nicht elementar lösbar → nochmals partielle Int.

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\cdot 2x\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) - \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin(3x)\cdot 2x - \int -\frac{1}{9}\sin(3x)\cdot 2\,dx\right)$

$\left(-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)\right)$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) - \left(-\frac{2}{9}x\sin(3x) - \frac{2}{27}\cos(3x)\right)$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{9}x\sin(3x) + \frac{2}{27}\cos(3x) + C$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

c) $\int \sin^2(x)dx$

$= \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) - \int -\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,dx$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx$ $\quad |+\int\sin^2 x$

$\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$

Trick: Als Gleichung lesen!

$2\cdot\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + x \quad |:2$

$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot(-\cos(x)\cdot\sin(x) + x) + c$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale durch geeignete Substitutionen.

(a) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(16+2x^2)^3}}$

b) $\int 3x^2\cdot e^{x^3}\,dx$

c) $\int 3x\cdot\sin(x^2+1)\,dx = -\frac{3}{2}\cos(x^2+1) + C$

$z = x^2 + 1$

$\frac{dz}{dx} = 2x$

$\frac{dz}{2x} = dx$

$\int 3\cancel{x}\sin(z)\frac{dz}{2\cancel{x}} = \int \frac{3}{2}\sin(z)dz = -\frac{3}{2}\cos(z) + C$

d) $\int \frac{3}{3x+1}\,dx = \ln|3x+1| + c$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Integrale durch Partialbruchzerlegung.

(a) $\int \frac{6x+10}{x^2+2x-3}\,dx$ (b) $\int \frac{3x^5+2x^4+3x^3}{x^4-1}\,dx$

$x = 1 \quad x = -3$

$\frac{6x+10}{(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$

$\frac{6x+10}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3)}{(x-1)(x+3)} + \frac{B(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$6x+10 = A(x+3) + B(x-1) \Rightarrow x=1: 6\cdot1+10 = A(1+3) + B(1-1)$

$16 = 4A$

$4 = A$

$x=-3: 6\cdot(-3)+10 = A(-3+3) + B(-3-1)$

$-8 = -4B$

$2 = B$

Damit $\int \frac{4}{x-1}dx + \int \frac{2}{x+3}dx$

$= 4\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C$

Integrate (6x+10)/(x^2+2x-3)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD

Indefinite integral

$\int \frac{6x+10}{x^2+2x-3}\,dx = 2(2\log(1-x) + \log(x+3)) + \text{constant}$

(assuming a complex-valued logarithm)

(c) $\int \frac{6x^2-4x-7}{x^3-3x-2}\,dx$

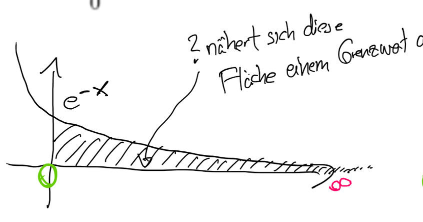
NS vom Nenner
$x = -1$ doppelt
$x = 2$ einfach

Aufgabe 6

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren.

(a) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ (b) $\int_0^1 \ln(2x)\,dx$

(C)



$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 7

$V = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$

Berechnen Sie das Volumen V der Rotationskörper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen:

(a) $f(x) = \frac{r}{h}x \quad , \quad 0 \le x \le h$

(b) $f(x) = 4\sqrt{x} \quad , \quad [0;4]$