24.08.2024

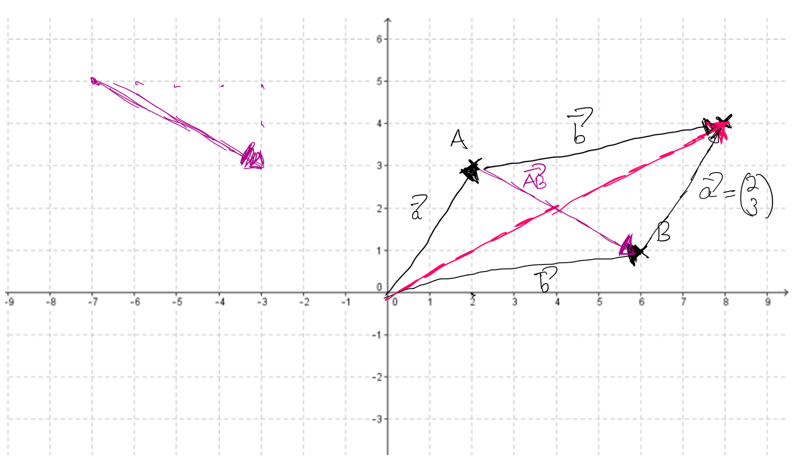
Samstag, 24. Februar 2024 22:15

12 Vektorrechnung

12.1 Grundlagen

Kraft

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe. Vektoren können durch Pfeile dargestellt werden. Jedem Punkt P im Koordinatensystem lässt sich ein sogenannter Ortsvektor $\vec{OP}$ zuordnen, der im Ursprung beginnt und in P endet. Die Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit denen von P überein.
Beispiel: $A(2\,|\,3)$ und $B(6\,|\,1)$



$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ x-Ko y-Ko

$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{OA} + \vec{OB}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

! Man kann Vektoren (Kräfte) parallel verschieben, dabei ändern sich nicht die Koordinaten

Definition 1.1: Addition von Vektoren

"geometrisch" Aneinanderhänge der Pfeile

Die Addition zweier Vektoren:
Vergleiche Kräfteparallelogramm in der Physik! Eine Kraft ist eine gerichtete Größe und lässt sich mittels Vektoren darstellen.

$$\vec{0A} + \vec{0B} =$$

Resultierende Kraft

Definition 1.2: Multiplikation mit einem Skalar (reeller Zahl)

$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$ $\vec{c}$ $3\vec{c}$

Bewirkt eine Veränderung der Länge bzw. der Orientierung, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert.

$$3 \cdot \vec{0A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Man erhält den sogenannten Gegenvektor durch Multiplikation mit -1.

Merke: Verbindungsvektor:

Prinzip: Endpunkt-Anfangspunkt

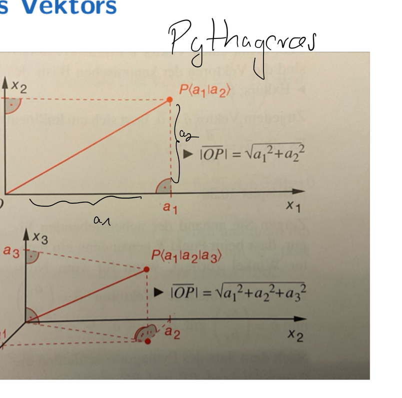
$$\underset{\text{von nach}}{\vec{AB}} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

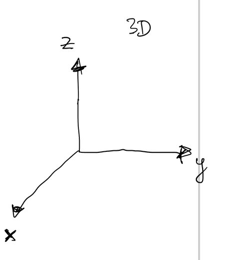
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

12.2 Betrag eines Vektors

Länge

Pythagoras





Merke:

Ein Vektor $\vec{b}$ heißt normiert, wenn er den Betrag 1 hat, also wenn $|\vec{b}| = 1$. Ein beliebiger Vektor kann normiert werden, indem man ihn mit dem Kehrwert seines Betrages multipliziert:

$$\vec{b_n} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b} \qquad \text{Bsp.: } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{,dann ist } \vec{b_n} =$$

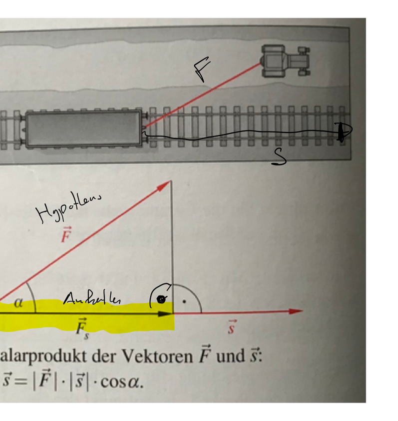
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{b_n} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

12.3 Skalarprodukt, Vektorprodukt

$\cos\alpha = \frac{|\vec{F_s}| \text{ An}}{|\vec{F}| \text{ Hyp}}$

$|\vec{F}| \cdot \cos\alpha = |\vec{F_s}|$



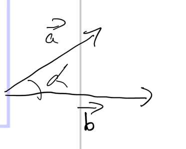
Skalarprodukt der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$:
$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$.

Physik:
Arbeit = Kraft · Weg
$W = F \cdot s$
nur der senkrechte Anteil projiziert auf den Weg relevant!
$W = |\vec{F_s}| \cdot |\vec{s}|$
$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Definition 3.1: Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel α einschließen, liefert als Ergebnis ein Skalar (reelle Zahl):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$



Merke:

In der Praxis verwendet benutzt man oft folgende Berechnung über die Koordinaten der Vektoren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 = -3 + 2 + 0 = -1$$

(Zahl/Skalar als Ergebnis)

! Falls Ergebnis 0, dann stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht (orthogonal) zueinander!

Merke:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$...

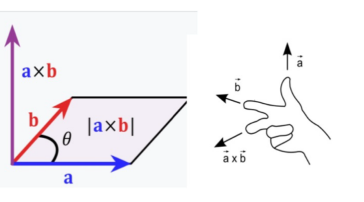
...hat das Ergebnis 0, dann stehen die Vektoren senkrecht (orthogonal) zueinander.

...liefert die senkrechte Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$, falls $\vec{b}$ die Länge 1 hat.

Formt man die Definition des Skalarprodukt nach α um, lässt sich damit der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen:

Definition 3.2: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liefert als Ergebnis einen Vektor $\vec{n}$, der jeweils senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet (siehe rechte Hand Regel). Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.



Probe: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 4 = 0$ ✓

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\cdot(-3) + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0$ ✓

Beispiel:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 4\cdot 1 \\ 4\cdot(-3) - 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 - 2\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{:7}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es findet praktische Anwendung in der Technik: Lorentzkraft, Drehmoment,...

12.4 Übungen

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunk der Strecke zwischen den Punkten $A(2\,|\,3)$ und $B(4\,|\,1)$.

Aufgabe 2
Skizzieren Sie die Punkte $A(1\,|\,1\,|\,0)$, $B(2\,|\,6\,|\,2)$ und $C(4\,|\,7\,|\,-1)$ in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den fehlenden Punkt D, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 3
Die Punkte $A(-1\,|\,0\,|\,2)$, $B(2\,|\,4\,|\,2)$ und $C(-5\,|\,3\,|\,10)$ bilden ein Dreieck.

1. Berechnen Sie die Länge der Seiten des Dreiecks.
2. Weisen Sie nach, dass bei A ein rechter Winkel vorliegt.
3. Berechnen Sie die Größen der beiden anderen Winkel.
4. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.