14 Regel von L´Hospital

Samstag, 24. August 2024 10:28

14 Regel von de L'Hospital

keine Quotientenregel !

Merke:

Liegt bei einer Grenzwertbestimmung ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\text{"}\infty\text{"}}{\text{"}\infty\text{"}}$ vor, darf man Zähler und Nenner getrennt Ableiten und den Grenzwert danach neu bestimmen. Ggf. kann dies mehrfach erfolgen.

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{1} = \underline{\underline{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{2x^2+6x}\ \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\text{"}\infty\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+6}\ \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\text{"}\infty\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{2}{4}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{2x-2} = \frac{6}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2x-e^{-x}}{x-\sin(x)}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2+e^{-x}}{1-\cos(x)}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)} = \underline{\underline{\frac{2}{1}}}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to -2}\frac{3}{3x^2} = \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

$e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$

TRICK:

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-2x}$ ($\infty \cdot 0$) $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}\ \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\text{"}\infty\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2}\cdot e^{2x}}\ \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\text{"}\infty\text{"}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{2e^{2x}}_{\to\infty}} = \underline{\underline{0}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}}$

$\overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\tan(x)}{2x}}\ \frac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0\text{"}}$

$\overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{\cos^2(x)}}{2}} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}}}}$