Blatt 6 Aufgabe 5c

Freitag, 23. August 2024 21:43

$$\int \frac{6x^2-4x-7}{x^3-3x-2}\,dx$$

① NS vom Nenner:
⋮ Polynomdiv./Hornerschema!

$x=-1$ doppelt
$x=2$ einfach

② Partialbruchzerlegung:

$$\frac{6x^2-4x-7}{(x+1)^2\cdot(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A\cdot(x+1)^2}{(x-2)\cdot(x+1)^2} + \frac{B\cdot(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+1)\cdot(x-2)} + \frac{C\cdot(x-2)}{(x+1)^2\cdot(x-2)}$$

Zähler betrachten:

$$\Leftrightarrow\ 6x^2-4x-7 = A\cdot(x+1)^2 + B\cdot(x+1)\cdot(x-2) + C\cdot(x-2)$$

NS einsetzen

$x=2$: $6\cdot 2^2-4\cdot 2-7 = A\cdot(2+1)^2 + B\cdot(2+1)\cdot\cancel{(2-2)} + C\cdot\cancel{(2-2)}$
$24-8-7 = 9A$
$9 = 9A$
$\underline{\underline{1=A}}$

$x=-1$: $6\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-7 = A\cdot\cancel{(-1+1)}^2 + B\cdot\cancel{(-1+1)}(-1-2) + C\cdot(-1-2)$
$6+4-7 = -3C$
$3 = -3C$
$\underline{\underline{-1=C}}$

ggf.
weitere ganze Zahlen einsetzen
z.B.: $x=0$:

$-7 = A\cdot(0+1)^2 + B\cdot(0+1)\cdot(0-2) + C\cdot(0-2)$
$-7 = A - 2B - 2C$
$-7 = 1 - 2B - 2\cdot(-1)$
$-7 = 3 - 2B$
$-10 = -2B$
$\underline{\underline{5=B}}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{5}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x-2| + 5\cdot\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\int -(\underbrace{x+1}_{\text{linear}})^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}(x+1)^{-1}$$
$$= (x+1)^{-1} = \frac{1}{(x+1)}$$

10.5 Partialbruchzerlegung ⇒ bei Rücktransformation der Laplace-Transformation
Grad Zähler < Grad Nenner?

Zweck: Integration von echt gebrochen rationalen Funktionen.
Idee: Mittels Partialbruchzerlegung wird der Bruch in einfacher zu integrierende Teilbrüche zerlegt (siehe oben).
Der Ansatz für die gesuchten Partialbrüche ist abhängig von der Anzahl und Art der Nullstellen des Nenners, es gilt:

Art der Nullstelle	Ansatz
jede einfache NS x_n	$\frac{A}{x-x_n}$
doppelte NS x_n	$\frac{B}{x-x_n}+\frac{C}{(x-x_n)^2}$
komplexe NS	$\frac{Dx+E}{x^2+k}, k>0$

Nachtrag zur Schreibweise:

$$\underset{\text{von } a}{\overset{\text{bis } b}{\int}} \underbrace{f(x)}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{Breite}}$$

Summe

$\int$ = "Summe"
Σ