Lösungen Blatt 7

Samstag, 24. August 2024   21:33

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zu Komplexe Zahlen

Aufgabe 1

Tip: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$ ⇐ reelle Zahl

Gegeben sind die Komplexen Zahlen $z_1 = \frac{1}{7} + 4i, z_2 = -3 - \frac{1}{6}i$ und $z_3 = -1 + 2i$.
Stellen Sie die Zahlen

$$w_1 = \bar{z}_1 + 2z_2 - 3z_3, \quad w_2 = \bar{z}_3 \bar{z}_3^{\,2} z_3, \quad w_3 = \frac{z_1}{z_3}$$

in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$w_1 = \frac{1}{7} - 4i + 2\cdot(-3 - \frac{1}{6}i) - 3\cdot(-1+2i)$
$= \frac{1}{7} - 4i - 6 - \frac{1}{3}i + 3 - 6i$
$= \frac{1}{7} - 3 - 10i - \frac{1}{3}i$
$= \frac{1}{7} - \frac{21}{7} - \frac{30}{3}i - \frac{1}{3}i = -\frac{20}{7} - \frac{31}{3}i$

$w_2 = \underbrace{\bar{z}_3 \cdot z_3}_{} \cdot \bar{z}_3^{\,2}$
$= |z_3|^2 \cdot (\underset{a}{-1} - \underset{b}{2i})^2$
$= \left(\sqrt{(-1)^2+(2)^2}\right)^2 \cdot ((-1)^2 - 2\cdot(-1)\cdot(2i) + (2i)^2)$
$= 5 \cdot (1 + 4i + 4i^2)$
$= 5 \cdot (-3+4i)$
$= \underline{\underline{-15+20i}}$

2. Bin. Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$w_3 = \frac{(\frac{1}{7}+4i)\cdot(-1+2i)}{\underset{\bar{z}_3}{(-1-2i)}\cdot\underset{z_3}{(-1+2i)}}$

Trick: Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner

$= \frac{(-\frac{1}{7} + \frac{2}{7}i - 4i + 8i^2)}{5}$
$= \frac{-\frac{1}{7} + \frac{2}{7}i - \frac{28}{7}i - \frac{56}{7}}{5}$
$= \frac{-\frac{57}{7} - \frac{26}{7}i}{\frac{5}{1}}$
$= \left(\frac{57}{7} - \frac{26}{7}i\right)\cdot\frac{1}{5}$
$= \underline{\underline{-\frac{57}{35} - \frac{26}{35}i}}$

Aufgabe 2

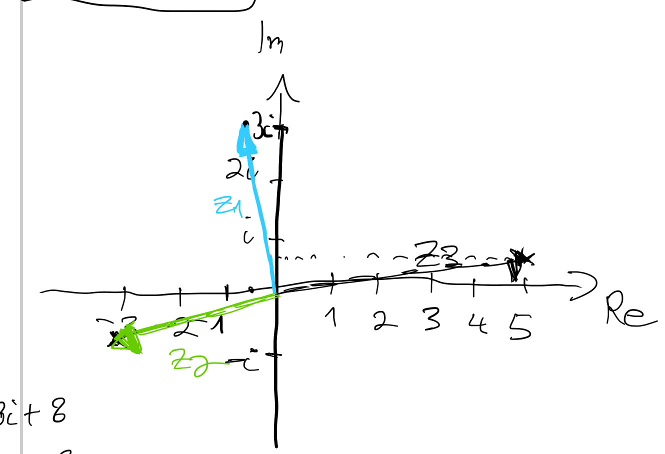
Es sei $z = 3 + 0.5i$. Veranschaulichen Sie in der Gaußchen Zahlenebene die Zahlen:

$$z_1 = iz, \quad z_2 = -z, \quad z_3 = z^2 i - 8(i-1).$$

$z_1 = i\cdot(3+0{,}5i)$
$= 3i + 0{,}5i^2$
$= \boxed{-0{,}5+3i}$

$z_2 = -(3+0{,}5i) = \boxed{-3-0{,}5i}$

$z_3 = (\underset{a}{3} + \underset{b}{0{,}5i})^2 \cdot i - 8\cdot(i-1)$
$= (9 + 3i + (0{,}5i)^2)\cdot i - 8i + 8$ ($a^2 + 2ab + b^2$)
$= (\frac{36}{4} + 3i - \frac{1}{4})\cdot i - 8i + 8$
$= (\frac{35}{4} + 3i)\cdot i - 8i + 8$
$= (\frac{35}{4}i + 3i^2 - 8i + 8)$
$= \boxed{5 + \frac{3}{4}i}$

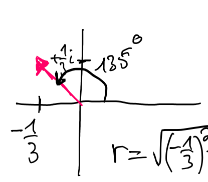


Aufgabe 3

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Trigonometrischer und Exponentialform dar:

$$z_1 = -\frac{1}{3}(1-i), \quad z_2 = -10, \quad z_3 = (\underset{a}{1} + \underset{b}{i})^9.$$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$



$r = \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

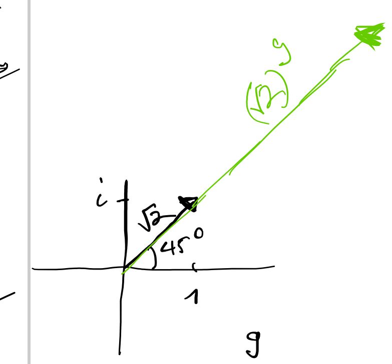
$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\, e^{i\cdot 135°}$

$z_1 = \underbrace{\frac{1}{3}\sqrt{2}\cdot\cos(135°)}_{a} + \underbrace{\frac{1}{3}\sqrt{2}\cdot\sin(135°)}_{b}\cdot i$

-10, $r = 10$, $180°$

$z_2 = 10\, e^{180°\cdot i}$

$z_2 = 10\cdot\underbrace{\cos(180°)}_{(-1)} + 10\cdot\underbrace{\sin(180°)}_{0}\cdot i$

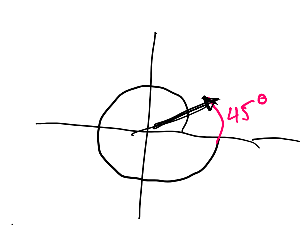


$z_3 = (\sqrt{2}\, e^{i 45°})^9$

$z_3 = \sqrt{2}^9 \cdot e^{i\cdot 9\cdot 45°}$

$= \sqrt{2}^9 \cdot e^{i\cdot 405°}$ $-360°$ bis zwischen 0–360°

$= \underline{(\sqrt{2})^9 \cdot e^{i\cdot 45°}}$



Aufgabe 4

Berechnen Sie:

a) $(1 - \underbrace{\sqrt{2}i}_{z})^5$

$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\varphi = 360° - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 305{,}26°$

$\Rightarrow (\sqrt{3}\, e^{i\,305{,}26°})^5 = (\sqrt{3})^5 \cdot e^{i\cdot 1526{,}3°}$ $-360°$
$= (\sqrt{3})^5 \cdot e^{i\cdot 86{,}3°}$

b) $\frac{(2+6i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}$

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

$z^2 - 4z + 7 = 0$ pq

$\Rightarrow z_{1,2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 7}$
$= 2 \pm \sqrt{4-7}$
$= 2 \pm \sqrt{-3}$ keine Lösung in $\mathbb{R}$
$= 2 \pm \sqrt{3\cdot i^2}$
$= 2 \pm \sqrt{3}\cdot i$ Lösungen in $\mathbb{C}$
(konjugiert komplexes Lösungspaar!)