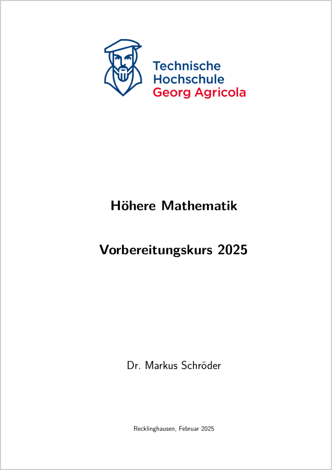
Mitschrift 10.02.2025

Samstag, 8. Februar 2025 21:59



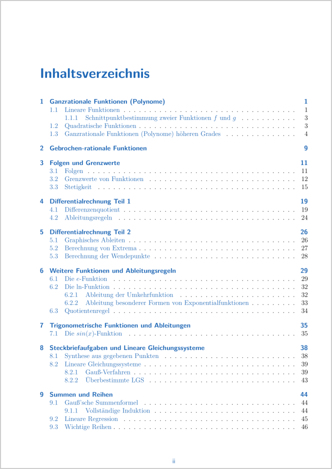
Technische
Hochschule
Georg Agricola

Höhere Mathematik

Vorbereitungskurs 2025

Dr. Markus Schröder

Recklinghausen, Februar 2025



Inhaltsverzeichnis

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) 1
- 1.1 Lineare Funktionen . . . 1
  - 1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g . . . 3
- 1.2 Quadratische Funktionen . . . 3
- 1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades . . . 4

2 Gebrochen-rationale Funktionen 9

3 Folgen und Grenzwerte 11
- 3.1 Folgen . . . 11
- 3.2 Grenzwerte von Funktionen . . . 12
- 3.3 Stetigkeit . . . 15

4 Differentialrechnung Teil 1 19
- 4.1 Differenzenquotient . . . 19
- 4.2 Ableitungsregeln . . . 24

5 Differentialrechnung Teil 2 26
- 5.1 Graphisches Ableiten . . . 26
- 5.2 Berechnung von Extrema . . . 27
- 5.3 Berechnung der Wendepunkte . . . 28

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln 29
- 6.1 Die e-Funktion . . . 29
- 6.2 Die ln-Funktion . . . 32
  - 6.2.1 Ableitung der Umkehrfunktion . . . 32
  - 6.2.2 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen . . . 33
- 6.3 Quotientenregel . . . 34

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen 35
- 7.1 Die $sin(x)$-Funktion . . . 35

8 Steckbriefaufgaben und Lineare Gleichungssysteme 38
- 8.1 Synthese aus gegebenen Punkten . . . 38
- 8.2 Lineare Gleichungssysteme . . . 39
  - 8.2.1 Gauß-Verfahren . . . 39
  - 8.2.2 Überbestimmte LGS . . . 43

9 Summen und Reihen 44
- 9.1 Gauß'sche Summenformel . . . 44
  - 9.1.1 Vollständige Induktion . . . 44
- 9.2 Lineare Regression . . . 45
- 9.3 Wichtige Reihen . . . 46

10 Integralrechnung und ihre Anwendungen 48
- 10.1 Unbestimmte Integrale . . . 48
- 10.2 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte . . . 49
- 10.3 Partielle Integration . . . 52
- 10.4 Integration mittels Substitution . . . 53
- 10.5 Partialbruchzerlegung . . . 53

11 Komplexe Zahlen 55
- 11.1 Kartesische Darstellung . . . 55
- 11.2 Trigonometrische Darstellung . . . 56
- 11.3 Darstellung in Exponentialform . . . 57

12 Vektorrechnung 58
- 12.1 Grundlagen . . . 58
- 12.2 Übungen . . . 60
- 12.3 Betrag eines Vektors . . . 61
- 12.4 Skalarprodukt, Vektorprodukt . . . 62
- 12.5 Übungen . . . 64

13 Mengen und Ungleichungen 65
- 13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen . . . 65
- 13.2 Ungleichungen . . . 66
- 13.3 Betragsungleichungen . . . 68

14 Regel von de L'Hospital 70

Literatur 71

---

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1.1 Lineare Funktionen

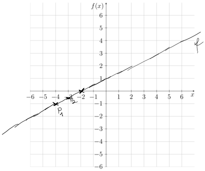
Der Graph einer Linearen Funktion ist immer eine Gerade.
Es folgt eine Analyse einer Linearen Funktion an einem Beispiel, mit der Ziel, anhand bestimmter charakteristischer Eigenschaften den Graph zu skizzieren:
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Erkennungsmerkmal
nur x [illegible]

y-Ko

x	$f(x)$ (Funktionswert $\hat{=}$ y-Koordinate)	Punkte $(x \mid f(x))$
-4	$f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)+1 = -2+1 = \underline{\underline{-1}}$	$P_1(-4 \mid -1)$
-3	$f(-3) = \frac{1}{2}\cdot(-3)+1 = -\frac{3}{2}+1 = -0{,}5$	$P_2(-3 \mid -0{,}5)$
-2	$f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)+1 = -1+1 = 0$	$P_4(-2 \mid 0)$
-1	$f(-1) =$ ⋮	
0	$f(0) =$	
1	$f(1) =$	
2	$f(2) =$	

Die Menge aller Punkte lässt sich als Graph in einem Koordinatensystem darstellen:



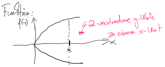
reelle Zahlen

bei Polynomen $D = \mathbb{R}$

Definition 1.1: Funktion

Eine Funktion ordnet jedem x aus dem Definitionsbereich (die Zahlen, die man für x einsetzen darf) eindeutig einen Funktionswert $\underbrace{f(x)}_{y\text{-Wert}}$ (die y-Koordinate) aus dem Wertebereich (Menge aller Funktionswerte) zu.

keine Funktion:



2 verschiedene y-Werte zu einem x-Wert

Den Graph einer Linearen Funktion kann man auch direkt mittels der im Funktionsterm vorhandenen Koeffizienten skizzieren:

allg: $f(x) = m \cdot x + b$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

y-Achsenabschnitt (Schn.-Hstelle mit y-Achse)

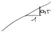
Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ← Anteil in y-Richtung, ← Anteil in x-Richtung im Steigungsdreieck

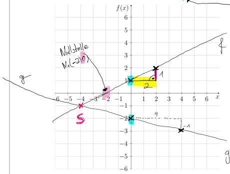
$m = \frac{1}{2}$

oder

$f(x) = \frac{0{,}5}{1} \cdot x + 1$

$m = \frac{0{,}5}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$





$g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

Das „Gegenteil“ zur Analyse ist die Synthese eines Funktionsterms aus gegebenen Daten: Gesucht ist eine Lineare Funktion g, die durch die Punkte $P(\underset{x_1}{4} \mid \underset{y_1}{-3})$ und $Q(\underset{x_2}{-8} \mid \underset{y_2}{0})$ verläuft.

$$g(x) = \underset{?}{m} \cdot x + \underset{?}{b}$$

①

Bestimmung von m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-3)}{-8 - 4} = \frac{3}{-12} \overset{:3}{=} \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

bisher: $g(x) = -\frac{1}{4}x + b$

Bestimmung von b: einen bekannten Punkt einsetzen: z.B. $P(4 \mid -3)$

$$-\frac{1}{4} \cdot 4 + b = -3$$
$$-1 + b = -3 \quad | +1$$
$$b = -2$$

Somit ist $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

Skizze in obiges KO

1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{4}x - 2 \quad | +\frac{1}{4}x \quad | -1$$

(Lineare Gleichung, nur x vorhanden ⇒ nach x auflösen)

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = -2 - 1$$
$$\frac{3}{4} \cdot x = -3 \quad | : \frac{3}{4}$$

! mit Kehrwert multiplizieren

$$x = \cancel{-3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = -4$$

$S(-4 \mid \underbrace{-1}_{})$

$f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1$
$= -2 + 1 = -1$

1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer Quadratischen Funktion ist immer eine ……Parabeln……(Bögen) ∩ ∪

Beispiel 1: Analyse von

$$f(x) = \overset{a}{2}x^2 + 4x - 6$$

- Öffnung der Parabel $a > 0$ nach oben, $a < 0$ nach unten
- Gestreckt bzw. gestaucht ist $\underset{\text{gestaucht}}{0 < |a| < 1}$, $\underset{\text{gestreckt}}{|a| > 1}$

$|3| = 3$

Betrag $|-4| = 4$

Die Erstellung einer qualitativen Skizze des Graphen von f ist noch nicht möglich. Daher werden im Folgenden die sog. **Nullstellen** der Funktion f berechnet. Die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist eines der wichtigsten Schritte für die Analyse und wird an vielen Stellen in der Analysis benötigt!

Definition 2.1: Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Hier gilt $f(x) = 0$.

von oben:

$f(x) = 0$
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad | -1$
$\frac{1}{2}x = -1 \quad | : \frac{1}{2}$
$x = -1 \cdot \frac{2}{1} = -2$

Nullstellen:
Ansatz: $f(x) = 0$

quadratische Gleichung

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad | : 2$

$x^2 \underset{p}{+2}x \underset{q}{-3} = 0 \quad |$ PQ

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$

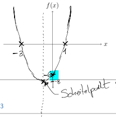
$= -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

$= -1 \pm \sqrt{4}$

$= -1 \pm 2$

$x_1 = -1 - 2 = -3$ oder $x_2 = -1 + 2 = 1$

Skizze:



Scheitelpunkt $S(\underset{-\frac{p}{2}}{-1} \mid -8)$

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = -8$
$= 2 - 4 - 6$

Definition 2.2: PQ-Formel

Hat die quadratische Gleichung die Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$, dann ergeben sich die Nullstellen mittels PQ-Formel zu:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sind die Nullstellen einer quadratischen Funktion bekannt, kann man direkt den Scheitelpunkt S der Parabel angeben:

$$S(\qquad \mid \qquad).$$

Beispiel 2: Analyse von

$$f(x) = 2x^2 - 4x$$

Nullstellen:

$f(x)=0$

$2x^2-4x=0$ (x ausklammern !)

$x\cdot(2x-4)=0$

! Produkt ist nur 0, falls ein Faktor 0 ist

$\underline{\underline{x=0}}$ oder $2x-4=0$

$2x=4$

$\underline{\underline{x=2}}$

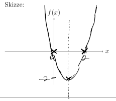
Scheitelpunkt:

$S(1|-2)$

$f(1)=2\cdot1^2-4\cdot1$

$=2-4=-2$

Skizze:



1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades

Der Grad eines Polynoms ist durch die höchste im Funktionsterm vorkommende Potenz festgelegt. Lösungen von Aufgabe 1 des ersten Übungsblatts:

$f(x) = \frac{1}{4}x - 16$

Nullstellen:

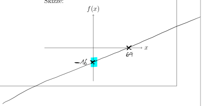
$f(x)=0$

$\frac{1}{4}x-16=0 \quad |+16$

$\frac{1}{4}x = 16 \quad |:\frac{1}{4}$

$\underline{\underline{x = 64}}$

Skizze:



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$

Nullstellen:

$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}=0 \quad |:(-\frac{1}{2})$ $\cdot(-2)$

$x^2\underset{p}{-6}x\underset{q}{+9}=0 \quad |PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2-9}$

$= 3 \pm \sqrt{9-9}$

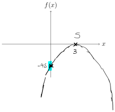
$= \underline{3}$ sog. doppelte NS !

↳ berührende NS !

Scheitelpunkt:

$S(3|0)$

Skizze:



Polynom 3. Grades !

$f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x$

linker Rand

rechter Rand

Nullstellen:

$f(x)=0$

$-2x^3-2x^2+12x=0$

$x\cdot(-2x^2-2x+12)=0$

$\underline{\underline{x=0}}$ oder $-2x^2-2x+12=0 \quad |:(-2)$

$x^2+1x-6=0 \quad |PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-6)}$

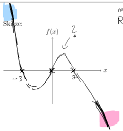
Randverhalten:

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2}-\frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = \underline{\underline{-3}}$ oder $x_2 = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

Skizze:



Merke:

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verlaufen an der Rändern immer gegen Unendlich!!!

linker Rand:

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$

z.B.: $x=-100$: $-2\cdot(-100)^3$

$-2\cdot(-1000000)$

$=+2000000$

Limes (Grenzwert) rechter Rand

$x\to+\infty$ x "gegen" Unendlich

Vorzeichen ?

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

In Gedanken:

setze für x eine große positive Zahl ein, z.B.: x=100

$-2\cdot(100)^3$

$-2\cdot1000000 = \underline{\underline{-2000000}}$

$a\cdot x^n$

Erkennbar an der Potenz und Vorfaktor:

n a

x^4

x^2

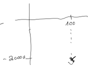
x^5

x^3

x^1

mind. 1 NS vorhanden

	n gerade	n ungerade
a pos	von $+\infty$ nach $+\infty$	von $-\infty$ nach $+\infty$
a neg	von $-\infty$ nach $-\infty$	von $+\infty$ nach $-\infty$



$f(x) = 2x^3 - 4x^2$

Nullstellen:

$2x^3-4x^2=0$

$x^2\cdot(2x-4)=0$

$x^2=0$ oder $2x-4=0$

$x\cdot x=0$ $\quad 2x=4$

$x=0 \quad x=0$ (doppelte NS) ! $\quad \underline{\underline{x=2}}$

Randverhalten:

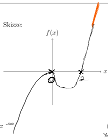
links

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

rechts

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

Skizze:



$f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

Nullstellen:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

substituiere $z = x^2$

$(z \cdot z = x^2 \cdot x^2)$
$(z^2 = x^4)$

$z^2 - 7z + 12 = 0 \quad | PQ$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}}$
$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$

~~Randverhalten~~:

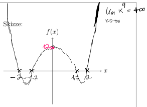
$z_1 = 3$ oder $z_2 = 4$

zurück substituieren: $\Updownarrow$

$x^2 = 3$ oder $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$! 2 Lösungen

$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}71 \quad x = \pm\sqrt{4} = \underline{\underline{\pm 2}}$

Skizze:



Symmetrie:

achsensymmetrisch: (bei Polynomen, deren alle Exponenten gerade sind)
punktsymmetrisch (zum Ursprung) " " ungerade

---

sog. Linearfaktorzerlegung

zur NS x=3 zur NS x=−2

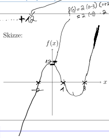
$f(x) = \boxed{2}(x-3)(x+2)(x-1) = \boxed{2}x^3 + \ldots\ldots\ldots + 12$

$f(0) = 2 \cdot (0-3) \cdot (0+2) \cdot (0-1) = \underline{\underline{12}}$
$= 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-1)$

Nullstellen: sind ablesbar!

$x = 3 \quad x = -2 \quad x = 1$

Skizze:



Randverhalten:

Definition 3.1: Linearfaktorzerlegung

Die hier angegebene Darstellungsform wird als Linearfaktorzerlegung eines Polynoms bezeichnet und kann unter Kenntnis der Nullstellen einfach aufgestellt werden. Würde man die Linearfaktorzerlegung wieder „ausmultiplizieren“ und zusammenfassen, gelangt man zu der bereits bekannten allgemeinen Darstellungsform.

Die Linearfaktorzerlegungen für die vorigen Beispiele lauten:

Nullstellen:

x=3 doppelt $\quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (x-3) \cdot (x-3) = -\frac{1}{2}(x-3)^2$

x=64 $\quad f(x) = \frac{1}{4}x - 16 = \frac{1}{4} \cdot (x-64)$

x=0, x=−3, x=2 $\quad f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x = -2(x-0) \cdot (x+3) \cdot (x-2) = -2x \cdot (x+3) \cdot (x-2)$

x=0 doppelt, x=2 $\quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 = 2x^2 \cdot (x-2)$

Weiterführendes Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Problem: Das Ausklammern von x ist hier nicht möglich!

Gleichungen dieser Art kann man mittels Polynomdivision oder Horner-Schema versuchen zu lösen. Dazu muss zunächst eine Nullstelle bekannt sein, die man durch Probieren herausfinden muss:

1. Schritt: Raten einer Nullstelle.
Tipp: Alle ganzzahligen Teiler der Konstanten 6, also ±1 ±2 ±3 ±6 könnten Kandidaten für Nullstellen sein.

teste $x=1$: $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6$
$= 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ ✓

---

2. Schritt: Durchführung der Polynomdivision
Da nun eine Nullstelle bekannt ist, kann man die Linearfaktorzerlegung zum Teil angeben:

x=1 ist NS

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (x-1) \cdot (\ldots.?\ldots.) \quad | : (x-1)$$

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = (\ldots.?\ldots.)$$

Polynomdivision:

$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - 1x - 6$

$-(x^3 - 1x^2)$

$\quad / \ -1x^2 - 5x$

$\quad -(-1x^2 + 1x)$

$\qquad / \ -6x + 6$

$\qquad -(-6x + 6)$

$\qquad\quad 0$ muss!

Restpolynom jetzt mit $\Rightarrow$ PQ-Formel lösbar!

$x^2 - 1x - 6 = 0 \quad | PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$
$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = -2$
$x_2 = 3$

① Teilen ② zurück rechnen ③ subtrahieren

$144 : 3 = 48$
-12
$\quad 24$
$\ -24$
$\quad 0$ ✓

Ziel der Polynomdivision ist letztlich die Reduzierung des Grades, so dass man auf das Restpolynom die bekannten Lösungsverfahren anwenden kann. Man kann die Polynomdivision „umgehen“, indem man das sogenannte Horner-Schema anwendet. Neben der schnellen Auswertung von Funktionswerten erhält man (beim Finden einer Nullstelle) direkt die Koeffizienten des Restpolynoms:
Horner-Schema:

mittels Horner-Schema:

	x^3	x^2	x	const
(Vorfaktoren)	1	−2	−5	+6
$x = \boxed{1}$		1	−1	−6
Vorfaktoren vom Restpolynom der Polynomdivision Σ	1	Σ −1	Σ −6	Σ 0
	x^2	x	const	

Eingabe $f(1) = \ldots\ldots$

übernommen

$f(1)$ y-KO, für $x=1$
$\Rightarrow$ damit $x=1$ eine NS

$\Rightarrow \underline{\underline{1x^2 - 1 \cdot x - 6}}$

Horner–Schema:
Eine effiziente Berechnungsmethode für Funktionswerte von Polynomen durch geeignete Klammerung:

$$P_n(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots)x + a_0$$

bzw. schematisch

a_k	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
$\times x^*$	$\downarrow$	xb_n	xb_{n-1}		$\ldots$	xb_1
Σ	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_1	$b_0 = P_n(x^*)$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen mittels Hornerschema: und mit Polynomdivision mit x=
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12$ Lösung: x=1,x=2,x=-6
b) $f(x) = x^3 - 7x - 6$ Lösung: x=-2,x=-1,x=3

a)

	x^3	x^2	x	const
	1	3	-16	12
x=1		1	4	-12
	1	4	-12	0
	x^2	x	const	

Rostpolynom: $x^2+4x-12$

bzw.

Linearfaktor

$$(x^3+3x^2-16x+12):(x-1) = x^2+4x-12$$
$$-(x^3-x^2)$$
$$4x^2-16x$$
$$-(4x^2-4x)$$
$$-12x+12$$
$$-(-12x+12)$$
$$0$$

b)

	x^3	x^2	x	const
	1	0	-7	-6
x=-2		-2	4	6
	1	-2	-3	0 ✓

ist NS

Rostpolynom: $1x^2-2x-3$

$$(x^3+0x^2-7x-6):(x+2) = x^2-2x-3$$
$$-(x^3+2x^2)$$
$$-2x^2-7x$$
$$-(-2x^2-4x)$$
$$-3x-6$$
$$-(-3x-6)$$
$$0$$

2 Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion f, deren Funktionsterm ein Bruch ist, wobei Zähler und Nenner jeweils Polynome sind, heißt gebrochen-rationale Funktion.
Ein einfaches Beispiel zu Beginn:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

Nenner darf nicht 0 werden bei einem Bruch!

Neu! Definitionsbereich:
NS vom Nenner: $x+1=0 \quad |-1$
$x=-1$
$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ "ohne" Menge
Definitionslücke
hier: eine sog. Polstelle = senkrechte Asymptote (trennt den Graph in zwei Teile auf.)

Nullstellen:
Zähler muss 0 werden!
$f(x)=0$
NS vom Zähler: $2x-1=0$
$2x=1$
$x=\frac{1}{2}$

y-Achsenschnitt:
$f(0) = \frac{2\cdot 0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

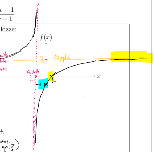
Neu! Asymptote(Randverhalten):
⇓
selbst eine Funktion (Graph) an dem sich der Graph der gegebenen Fkt. f im Unendlichen annähert
(vorher kann die Asymptote geschnitten werden... ist egal!)

⇒ Asymptote ergibt sich durch Polynomdivision:
Zähler : Nenner ⇒ i.A. bleibt dabei Rest über

$$(2x-1):(x+1) = 2 + \frac{-3}{(x+1)} \quad \text{Rest}$$
$$-(2x+2)$$
$$-3 \quad \text{Rest}$$

$a(x) = 2$ Asymptote

Skizze:



Merke:

Das Randverhalten einer gebrochen-rationalen Funktion f wird durch die sogenannte Asymptote bestimmt. Die Asymptote ist selbst eine Funktion, dessen Funktionsterm sich durch den “ganzzahligen Anteil “der Polynomdivision von “Zähler : Nenner “ergibt. Der Graph von f nähert sich im Unendlichen immer mehr dem Graph der Asymptote, zuvor kann der Graph von f die Asymptote auch schneiden oder berühren.

Ein ausführlicheres Beispiel zum Schluss:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^2 - x - 6}$$

Neu! Definitionsbereich:
NS vom Nenner:
$x^2-x-6=0 \quad |\text{PQ}$
⋮
$x=-2$ oder $x=3$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$
Pol
hebLücke

Nullstellen: NS Zähler:
$2x^3+2x^2-4x=0$
$x\cdot(2x^2+2x-4)=0$
$x=0$ oder $x^2+x-2=0 \quad |\text{PQ}$
$\Rightarrow x=1$ oder $x=-2$

y-Achsenschnitt: $f(0)=0$

Neu! Asymptote(Randverhalten):

$$(2x^3+2x^2-4x):(x^2-x-6) = 2x+4 + \frac{12x+24}{x^2-x-6}$$
$$-(2x^3-2x^2-12x)$$
$$4x^2+8x$$
$$-(4x^2-4x-24)$$
$$12x+24 \quad \text{Rest}$$

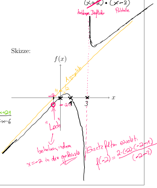
$a(x) = 2x+4$
Asymptote

Neu! Ersatzfunktion, Art der Definitionslücke:

$$f(x) = \frac{2x^3+2x^2-4x}{x^2-x-6} = \frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-3)}$$

keine NS
hebbare Deflücke
Polstelle

Skizze:



"Loch"
beheben, indem x=-2 in die gekürzte
Ersatzfktn einsetzt:
$f(-2) = \frac{2\cdot(-2)\cdot(-2-1)}{(-2-3)} = \frac{12}{-5} = -24$

Merke:

Erstellt man für Zähler und Nenner jeweils die Linearfaktorzerlegung, kann man daraus wichtige Eigenschaften der Funktion f erkennen:

1. Es liegt eine Nullstelle vor, wenn nur das Zählerpolynom diese Nullstelle hat. Haben Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen, muss man deren Vielfachheit betrachten.
2. Ist die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners kleiner oder gleich der des Zählers, liegt eine hebbare Definitionslücke vor. Dort hat der Graph ein ”Loch”, der fehlende Funktionswert kann durch den Funktionswert der gekürzten Linearfaktorzerlegung (der sog. Ersatzfunktion f^*) behoben werden.
3. Ansonsten liegt eine Polstelle (im Prinzip eine senkrechte Asymptote) vor, bei diesen Definitionslücken laufen die Funktionswerte gegen unendlich, wenn man sich ihnen von links oder rechts nähert (ein sog. Unendlichkeitsstelle). In der Ersatzfunktion f^* gilt, bei gerader Vielfachheit der Nennernullstelle liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (Annäherung auf beiden Seiten entweder gegen $+\infty$ oder $-\infty$), bei ungerader Vielfachheit liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor (auf der einen Seite gegen $+\infty$ und auf der anderen gegen $-\infty$ bzw. umgekehrt).