

Blatt5-Summenzeichen

Mittwoch, 21. Februar 2024 21:25



Blatt5-Summenz...

Dr. Markus Schröder



Mathematik Vorbereitungskurs Summen

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie

$$0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4) + (-5) = -15$$

$$= (2-2) + (2-3) + (2-4) + (2-5) + (2-6) + (2-7)$$

1.) $\sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$

2.) $\sum_{i=2}^7 (2-i)$

3.) $\sum_{i=0}^4 (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 = 55$

4.) $\sum_{i=3}^8 \left(10 - \frac{i}{2}\right)$

5.) $\sum_{i=2}^6 (-i)^i$

6.) $\sum_{i=0}^5 \frac{i}{i+2}$

b) Schreiben Sie als Summe

1.) $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 30 = \sum_{i=0}^{10} 3i$

2.) $(-1) + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = \sum_{i=1}^8 (-1)^i \cdot i$

3.) $0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 400 = \sum_{i=0}^{20} i^2$

c) Ermitteln Sie die Grenzen der Laufvariablen

1.) $\sum_{i=3}^{10} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10}$

2.) $\sum_{i=0}^{12} \frac{2^i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4096}{3}$

3.) $\sum_{i=3}^{18} (-1)^i \cdot i^2 = (-9) + 16 - 25 + \dots + 324$

Merke: Verschiebt man den Index um den Wert k nach links (rechts), muss man den Index überall durch $(i+k)$ (bzw. $(i-k)$) ersetzen.

d) Führen Sie eine Indexverschiebung durch

1.) $\sum_{i=1}^{10} (i-1) = \sum_{i=1}^5 (i+5) - 1 = \sum_{i=1}^5 (i+4)$

2.) $\sum_{i=4}^{10} (i+4) = \sum_{i=?}^8 ?$

3.) $\sum_{i=5}^{10} (8-i) = \sum_{i=1}^? ?$

4.) $\sum_{i=2}^8 (3-i) = \sum_{i=?}^6 ?$

5.) $\sum_{i=3}^{15} (2i+3) = \sum_{i=1}^? ?$

6.) $\sum_{i=4}^{10} (i^2-2) = \sum_{i=1}^? ?$

Quellen: <http://www.juergenmeisel.de/oa/uebung/uebung/Summenzeichen.pdf>

3.) $\sum_{i=5}^{10} (8-(i+4)) = \sum_{i=1}^6 (4-i)$

Dr. Markus Schröder



Mathematik Vorbereitungskurs Summen

Aufgabe 2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad (\text{für alle } n \geq 1)$$

Quelle: <https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf>

Aufgabe 3 Lineare Regression

(i) Gegeben sind die Punkte $P_1(-3, 14)$, $P_2(-2, 11)$, $P_3(0, 5)$, $P_4(2, -1)$ und $P_5(8, -19)$. Bestimmen Sie die durch diese festgelegte Regressionsgerade. Zur Erinnerung:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

und $b = \bar{y} - m \bar{x}$.

(ii) Liegt einer der Punkte P_i , $i = 1, \dots, 5$, auf der Gerade? (Tipp: Bestimmen Sie die Gerade durch P_3 und P_4 . Was fällt auf?)

(iii) Bestimmen Sie weiterhin den Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n s_x s_y}$$

Beweis: $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

① Induktionsanfang:

$n=1$: $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ ✓

② Induktionsschritt:

Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$

Starte: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1)$

$= n^2 + (2(n+1)-1)$
 $= n^2 + 2n + 2 - 1$
 $= n^2 + 2n + 1$
 $= (n+1)^2$ ✓