Lösungen Blatt 9

Samstag, 15. Februar 2025 17:50

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

① a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2} \quad | 25^{\wedge}$

$\cancel{25^{\log_{25}}} x = 25^{-\frac{1}{2}}$

$x = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Exponentialgleichungen

g) $\log_x(x+6) = 2 \quad | x^{\wedge}$

$x + 6 = x^2 \quad | -x^2$

$-x^2 + x + 6 = 0 \quad | :(-1)$

$x^2 - x - 6 = 0 \quad |$ PQ

$\boxed{x = -2}$ oder $x = 3$

erfüllt positive Basis ! erforderlich

Aufgabe 1 Berechnen Sie jeweils die unbekannte Größe x.

(a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{3}} x = 8$ $\log_{\sqrt{5}} x = 6$ $\log_9 x = \frac{1}{4}$

(b) $\log_x 16 = 4$ (c) $\log_x 27 = 3$ (d) $\log_4(5x-1) = -1$

(e) $\log_2(x^2-1) = 4$ (f) $\log_5 x^2 = 3$ (g) $\log_x(x+6) = 2$

(h) $\log_x(15-2x) = 2$ (i) $\log_x(32-4x^2) = 4$

Umkehrfunktion

② a) $2^x = 5 \quad | \log_2$

$\cancel{\log_2} 2^x = \log_2 5$

$x = \log_2 5$

TR oft nicht verfügbar

ODER

man kann beliebig Logarithmieren

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\ln 2^x = \ln 5 \quad |$ 3. Log-Gesetz

$x \cdot \ln 2 = \ln 5$

$x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

Aufgabe 2 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in ℝ.

(a) $2^x = 5$ (b) $3^x = 24$ (c) $4^x = \frac{1}{3}$

(d) $2^{x+2} = 5$ (e) $3^{4x} = 5$ (f) $4^{2x+1} = 5$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Exponentialgleichungen.

(a) $3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$ (b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$

$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 84 \Leftrightarrow 3^x \cdot (3^{-1} + 3^2) = 84$

$3^x = \frac{84}{3^{-1}+3^2}$

$3^x = \frac{84}{\frac{1}{3}+9} \Leftrightarrow 3^x = {}^3\cancel{84} \cdot \frac{3}{\cancel{28}} \Leftrightarrow 3^x = 9$ man erkennt $x = 2$

(c) $2^{x+2} + 2^x = 40$ (d) $2^{x+3} + 2^x = 144$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Lösungen x ∈ ℝ folgender Exponentialgleichungen.

(a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$ (b) $2^x + 4 = 32 \cdot 2^{-x}$

(c) $3^x + 6 \cdot 3^{-x} = 5$ (d) $3^x + 6 = 27 \cdot 3^{-x}$

(e) $2^{x+2} + 1 = 2^{-x-1}$ (f) $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$

(g) $2^{x-2} = 2^{3-x} + 1$ (h) $2^{x+1} - \frac{1}{2^x} = 1$

④ a) $4 \cdot (2^x)^2 - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$

Substituiere $\boxed{z = 2^x}$

$4z^2 - 35z + 24 = 0 \quad | :4$

$z^2 - \frac{35}{4}z + 6 = 0 \quad |$ PQ

$z_{1,2} = \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{1225}{64} - 6}$

$= \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{841}{64}} = \frac{35}{8} \pm \frac{29}{8}$

$z_1 = \frac{3}{4}$ $z_2 = 8$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$2^x = \frac{3}{4} \quad | \ln$ $2^x = 8 \Rightarrow$ "gesehen" $x = 3$

$\ln 2^x = \ln \frac{3}{4}$

$x \cdot \ln 2 = \ln \frac{3}{4}$

$x = \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2}$

Aufgabe 5 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in ℝ.

(a) $16^x - 12 \cdot 4^x + 32 = 0$ (b) $3^{2x+1} \cdot 3^{x-1} = 1$

Aufgabe 6 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Logarithmengleichungen.

(a) $\ln x^5 = \ln x^2 + 6 \quad | -\ln x^2$ (b) $\frac{1}{3}\lg x^2 + \frac{1}{2}\lg x^3 = \frac{2}{100}$ 3. Log-Gesetz 1. Log-Gesetz

$\underbrace{\ln x^5 - \ln x^2}_{2.\text{ Log-Gesetz}} = 6$

$\ln\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = 6 \quad | e^{\wedge}$

$\cancel{e^{\ln}}\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = e^6$

$\frac{x^5}{x^2} = e^6$

$x^3 = e^6 \quad | \sqrt[3]{}$

$(x^3)^{\frac{1}{3}} = (e^6)^{\frac{1}{3}}$

$x = e^2$

(b)

$\lg(x^2)^{\frac{1}{3}} + \lg(x^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{100}$

$\lg x^{\frac{2}{3}} + \lg x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{100} \quad |$ 1. Log-Gesetz

$\lg\left(x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{100}$

$\lg\left(x^{\frac{4}{6}} \cdot x^{\frac{9}{6}}\right) = \frac{2}{100}$

$\lg\left(x^{\frac{13}{6}}\right) = \frac{2}{100} \quad | 10^{\wedge}$

$x^{\frac{13}{6}} = 10^{\frac{2}{100}} \quad | \frac{6}{13}$

$\left(x^{\frac{13}{6}}\right)^{\frac{6}{13}} = \left(10^{\frac{2}{100}}\right)^{\frac{6}{13}}$

$\frac{12}{1300} = \frac{3}{325}$

$x = 10^{\frac{3}{325}}$

$\lg x = \frac{3}{325} \quad | 10^{\wedge}$

$\cancel{10^{\lg}} x = 10^{\frac{3}{325}}$

$x = 10^{\frac{3}{325}}$

Logarithmengesetze, für $a > 0$, $x > 0$ und $y > 0$

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,
3. $\log_a(x^n) = n \cdot \log(x)$,

$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_a(x)$,

Die wichtigsten Potenzgesetze

Multiplikation und Division bei gleichen Basen:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a \in \mathbb{R}$	$m,n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$m,n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a,b \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a,b \in \mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a \in \mathbb{R}$	$m,n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$m \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}^*$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$a^0 = 1$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Q}$

Quelle: https://123mathe.de/exponentialgleichungen-loesen-regeln

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,

$\log_a(x^n) = n \cdot \log(x)$,

$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_a(x)$,