Lösungen Blatt 1 - HM1 WS 2009/10 -

Aufgabe 1

(a)

$\log_{25} x = -\frac{1}{2}$

$x = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$

$\mathbf{L} = \{\frac{1}{5}\}$

$\log_{\sqrt{3}} x = 8$

$x = \sqrt{3}^8 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 8}$

$x = 3^4 = 81$

$\mathbf{L} = \{81\}$

$\log_{\sqrt{5}} x = 6$

$x = \sqrt{5}^6 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 6}$

$x = 5^3 = 125$

$\mathbf{L} = \{125\}$

$\log_9 x = \frac{1}{4}$

$x = 9^{\frac{1}{4}} = 3^{2\cdot\frac{1}{4}}$

$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\mathbf{L} = \{\sqrt{3}\}$

(b)

$\log_x 16 = 4$

$x^4 = 16 = 2^4$

$x = \pm 2$

$\mathbf{L} = \{2\}$

(c)

$\log_x 27 = 3$;

$x^3 = 27 = 3^3$

$x = 3$

$\mathbf{L} = \{3\}$

(d)

$\log_4 (5x-1) = -1$

$5x - 1 = 4^{-1}$

$5x = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$x = \frac{1}{4}$

$\mathbf{L} = \{\frac{1}{4}\}$

(e)

$\log_2 (x^2 - 1) = 4$

$x^2 - 1 = 2^4$

$x^2 = 17$

$x = \pm\sqrt{17}$

$\mathbf{L} = \{\pm\sqrt{17}\}$

(f)

$\log_5 x^2 = 3$

$x^2 = 5^3 = 125$

$x = \pm\sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$

$\mathbf{L} = \{\pm 5\sqrt{5}\}$

(g)

$\log_x (x+6) = 2$

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \notin \mathbf{L} \end{cases}$

$\mathbf{L} = \{3\}$

(h)

$\log_x (15 - 2x) = 2$

$x^2 = 15 - 2x$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \notin \mathbf{L} \end{cases}$

$\mathbf{L} = \{3\}$

(i)

$\log_x (32 - 4x^2) = 4$

$x^4 = 32 - 4x^2$

$x^4 + 4x^2 - 32 = 0$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, also eine quadratische Gleichung für x^2 !

$x^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16+128}}{2} = \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} 4 \\ -8 \end{cases}$

Aus $x^2 = 4$ folgt $x_{1,2} = \pm 2$,

aus $x^2 = -8$ folgt keine reelle Lösung.

Aufgabe 2

(a)

$2^x = 5$

$x \cdot \lg 2 = \lg 5$

$x = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2{,}3219$

(b)

$3^x = 24$

$x \cdot \lg 3 = \lg 24$

$x = \frac{\lg 24}{\lg 3} \approx 2{,}8928$

(c)

$4^x = \frac{1}{3}$

$x \cdot \lg 4 = \lg \frac{1}{3} = -\lg 3$

$x = -\frac{\lg 3}{\lg 4} \approx -0{,}7925$

(d)

$2^{x+2} = 5$

$(x+2) \cdot \lg 2 = \lg 5$

$x + 2 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$

$x = \frac{\lg 5}{\lg 2} - 2 \approx 0{,}3219$

(e)

$3^{4x} = 5$

$4x \cdot \lg 3 = \lg 5$

$x = \frac{\lg 5}{4 \cdot \lg 3} \approx 0{,}3662$

(f)

$4^{2x+1} = 5$

$(2x+1) \cdot \lg 4 = \lg 5$

$2x + 1 = \frac{\lg 5}{\lg 4}$

$2x = \frac{\lg 5}{\lg 4} - 1$

$x = \frac{\lg 5}{2 \cdot \lg 4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}0805$

Aufgabe 3

(a)

$$3^{x-1}+3^{x+2}=84$$
$$\frac{3^x}{3}+3^2\cdot 3^x=84 \;\big|\; 3$$
$$3^x+3^3\cdot 3^x=84\cdot 3$$
$$28\cdot 3^x=84\cdot 3 \;\big|:28$$
$$3^x=9$$
$$\mathbf{L}=\{2\}$$

(b)

$$2^{x-2}+2^{x+2}=34$$
$$\frac{2^x}{4}+4\cdot 2^x=34 \;\big|\cdot 4$$
$$2^x+16\cdot 2^x=34\cdot 4$$
$$17\cdot 2^x=34\cdot 4 \;\big|:17$$
$$2^x=8$$
$$\mathbf{L}=\{3\}$$

(c)

$$2^{x+2}+2^x=40$$
$$2^x\cdot 2^2+2^x=40$$
$$(4+1)\cdot 2^x=40$$
$$5\cdot 2^x=40$$
$$2^x=8=2^3$$

(d)

$$2^{x+3}+2^x=144$$
$$8\cdot 2^x+2^x=144$$
$$9\cdot 2^x=144$$
$$2^x=16$$
$$x=4$$

(e)

$$4^{\frac{1}{2}x+2}-2^{x+1}=42$$
$$(2^2)^{\frac{1}{2}x+2}-2^{x+1}=42$$
$$2^{x+4}-2^{x+1}=42$$
$$2^x\cdot 2^4-2^x\cdot 2^1=42$$
$$16\cdot 2^x-2\cdot 2^x=42$$
$$14\cdot 2^x=42$$
$$2^x=3 \quad |\lg$$
$$x\cdot \lg 2=\lg 3$$
$$x=\frac{\lg 3}{\lg 2}\approx 1{,}585$$
$$\mathbf{L}=\{1{,}585\}$$

(f)

$$4\cdot 3^{2-x}+2\cdot 3^{1-x}=7$$
$$4\cdot\frac{3^2}{3^x}+2\cdot\frac{3}{3^x}=7 \quad |\cdot 3^x$$
$$36+6=7\cdot 3^x$$
$$7\cdot 3^x=62$$
$$3^x=6 \quad |\lg$$
$$x\cdot\lg 3=\lg 6$$
$$x=\frac{\lg 6}{\lg 3}\approx 1{,}631$$
$$\mathbf{L}=\{1{,}631\}$$

Aufgabe 4

(a)

$$4\cdot 2^{2x}-35\cdot 2^x+24=0$$
$$4\cdot(2^x)^2-35\cdot 2^x+24=0$$
$$2^x=\frac{35\pm\sqrt{1225-384}}{8}=\frac{35\pm 29}{8}=\begin{cases}\frac{6}{8}\\ 8\end{cases}$$

Aus $2^x=\frac{3}{4}$ folgt $x\cdot\lg 2=\lg 0{,}75 \Rightarrow x=\frac{\lg 0{,}75}{\lg 2}\approx -0{,}415$

Aus $2^x=8$ folgt $x=3$

$$\mathbf{L}=\{3;\ -0{,}415\}$$

(b)

$$2^x+4=32\cdot 2^{-x} \quad |\cdot 2^x$$
$$(2^x)^2+4\cdot 2^x-32=0$$
$$2^x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 32}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases}4\\ -8\end{cases}$$

Aus $2^x=4$ folgt $x_1=2$

Aus $2^x=-8$ folgt $x_2\notin\mathbf{R}$.

$$\mathbf{L}=\{2\}$$

(c)

$$3^x+6\cdot 3^{-x}=5 \;\big|\cdot 3^x$$
$$3^{2x}-5\cdot 2^x+6=0$$
$$3^x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\ 2\end{cases}$$

Aus $3^x=3$ folgt $x_1=1$

Aus $3^x=2$ folgt $x\cdot\lg 3=\lg 2$, also $x_2=\frac{\lg 2}{\lg 3}\approx 0{,}631$

$$\mathbf{L}=\{1;\ 0{,}631\}$$

(d)

$$3^x+6=27\cdot 3^{-x} \quad |\cdot 3^x$$
$$3^{2x}+6\cdot 3^x-27=0$$
$$3^x=\frac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot 27}}{2}=\frac{-6\pm 12}{2}=\begin{cases}3\\ -9\end{cases}$$

Aus $3^x=3$ folgt $x_1=1$

Aus $3^x=-8$ folgt $x_2\notin\mathbf{R}$.

$$\mathbf{L}=\{1\}$$

(e) $2^{x+2}+1=2^{-x-1}$

$2^x\cdot 2^2+1=\frac{1}{2^x\cdot 2}\quad \Big|\cdot 2^x$

$4\cdot 2^{2x}+2^x-\frac{1}{2}=0$

$2^x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{8}=\frac{-1\pm 3}{8}=\begin{cases}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$

Aus $2^x=\frac{1}{4}\Rightarrow x=-2$, aber $2^x=-\frac{1}{2}$ hat keine Lösung.

$\mathbf{L}=\{-2\}$

(f) $3^x+2\cdot 3^{1-x}=5$

$3^x+2\cdot 3^1 3^{-x}=5\quad |\cdot 3^x$

$3^{2x}+6=5\cdot 3^x$

$(3^x)^2-5\cdot 3^x+6=0$

$3^x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

Aus $3^x=3$ folgt $x_1=1$

Aus $3^x=2$ folgt $x\cdot\lg 3=\lg 2 \Leftrightarrow x_2=\frac{\lg 2}{\lg 3}\approx 0{,}631$

$\mathbf{L}=\left\{1;\frac{\lg 2}{\lg 3}\right\}$

(g) $2^{x-2}=2^{3-x}+1$

$\frac{2^x}{4}=\frac{8}{2^x}+1\quad |\cdot 2^x$

$\frac{1}{4}\cdot 2^{2x}=8+2^x$

$\frac{1}{4}\cdot 2^{2x}-2^x-8=0$

$2^x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{\frac{1}{2}}=2(1\pm 3)=\begin{cases}8\\-4\end{cases}$

Aus $2^x=8$ folgt $x=3$, $2^x=-4$ hat aber keine Lösung.

$\mathbf{L}=\{3\}$

(h) $2^{x+1}-\frac{1}{2^x}=1\quad |\cdot 2^x$

$2\cdot(2^x)^2-1=2^x \Leftrightarrow 2\cdot(2^x)^2-2^x-1=0$

$2^x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2\cdot 2}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{2}\end{cases}$

Aus $2^x=1$ folgt $x_1=0$, $2^x=-\frac{1}{2}$ besitzt keine Lösung.

$\mathbf{L}=\{0\}$

Aufgabe 5

(a) $16^x-12\cdot 4^x+32=0$

$(4^2)^x-12\cdot 4^x+32=0$

$4^x=\frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot 32}}{2}=\frac{12\pm 4}{2}=\begin{cases}8\\4\end{cases}$

Aus $4^x=8$ folgt $2^{2x}=2^3 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Aus $4^x=4$ folgt $x=1$.

$\mathbf{L}=\{\frac{3}{2};1\}$

(b) $3^{2x+1}\cdot 3^{x-1}=1$

$3^{2x}\cdot 3\cdot 3^x\cdot\frac{1}{3}=1$

$3^{3x}=1=3^0$

$3x=0 \Leftrightarrow x=0$

$\mathbf{L}=\{0\}$ (Hier lag keine Summe, sondern ein Produkt vor !)

(c) $3^{2x+1}-3^{x-1}=1$

$3^{2x}\cdot 3-3^x\cdot\frac{1}{3}=1\quad |\cdot 3$

$9\cdot(3^x)^2-3^x-3=0$

$3^x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 9\cdot 3}}{2\cdot 9}=\frac{1\pm\sqrt{109}}{18}\approx\begin{cases}0{,}636\\<0\end{cases}$

$x\cdot\lg 3\approx\lg 0{,}636 \Leftrightarrow x\approx\frac{\lg 0{,}636}{\lg 3}\approx -0{,}412$ bzw. -0,4125

$\mathbf{L}=\{-0{,}412\}$

(d) $5^{2x-1}-2\cdot 5^{x+1}+\frac{49}{5}=0$

$5^{2x}\cdot\frac{1}{5}-2\cdot 5^x\cdot 5+\frac{49}{5}=0\quad |\cdot 5$

$(5^x)^2-50\cdot 5^x+49=0$

$5^x=\frac{50\pm\sqrt{2500-196}}{2}=\frac{50\pm 48}{2}=\begin{cases}49\\1\end{cases}$

$5^x=49 \Leftrightarrow x\cdot\lg 5=\lg 49 \Leftrightarrow x=\frac{\lg 49}{\lg 5}\approx 2{,}418$

$5^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$\mathbf{L}=\{2{,}418;0\}$

Aufgabe 6

a) e^2 b) $10^{\frac{12}{1300}}$