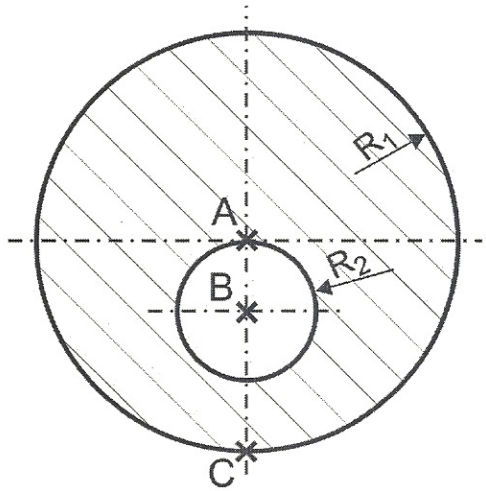
1.) Massenträgheitsmoment gebohrter Zylinder



Gegeben:

- Der dargestellte Zylinder mit Außenradius R_1 = 50mm und exzentrischer Bohrung mit Radius R_2 = 15mm;
- Gesamtmasse des (schraffierten) Bauteils m = 3kg;
- Dicke t und Dichte ρ konstant;

Gesucht:

Massenträgheitsmomente $J_{ges}^{(A)}, J_{ges}^{(B)}, J_{ges}^{(C)}$ des dargestellten Körpers bezüglich der Drehachsen A, B und C.

Gesamtfläche $A_{ges} = A_1 - A_2 = \pi \cdot R_1^2 - \pi \cdot R_2^2 = 7854\,mm^2 - 707\,mm^2 = 7147\,mm^2$

Teilmassen: $m_1 = m_{ges} \cdot \frac{A_1}{A_{ges}} = 3{,}3\,kg$; $m_2 = 0{,}3\,kg$

Massenträgheitsmomente bzgl. Symmetrieachsen der Teilkörper:

$$J_{1,eig} = \frac{m_1 \cdot R_1^2}{2} = \frac{3{,}3\,kg \cdot (0{,}05\,m)^2}{2} = 0{,}00413\,kg\,m^2$$

$$J_{2,eig} = \frac{m_2 \cdot R_2^2}{2} = \frac{0{,}3\,kg \cdot (0{,}015\,m)^2}{2} = 0{,}000034\,kg\,m^2$$

$$J_{ges}^{(A)} = J_{1,eig} + \cancel{J_{1,Stein}^{(A)}}^{\,0} - \left(J_{2,eig} + J_{2,Stein}^{(A)}\right) = 0{,}00413\,kg\,m^2 - 0{,}000034\,kg\,m^2 - (0{,}015\,m)^2 \cdot 0{,}3\,kg = 0{,}00403\,kg\,m^2$$

$(0{,}015\,m) = \overline{AB} = R_2$; $\overline{AB} = R_2$

$$J_{ges}^{(B)} = J_{1,eig} + J_{1,Stein}^{(B)} - \left(J_{2,eig} + \cancel{J_{2,Stein}^{(B)}}^{\,0}\right) = 0{,}00413\,kg\,m^2 + 3{,}3\,kg \cdot (0{,}015\,m)^2 - 0{,}000034\,kg\,m^2 = 0{,}00484\,kg\,m^2$$

$\overline{CA} = R_1$

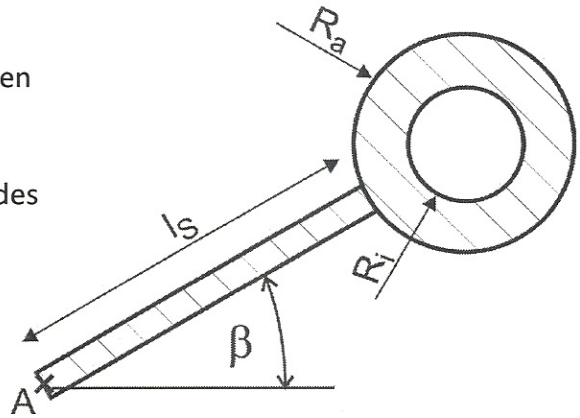
$$J_{ges}^{(C)} = J_{1,eig} + J_{1,Stein}^{(C)} - \left(J_{2,eig} + J_{2,Stein}^{(C)}\right) = 0{,}00413\,kg\,m^2 + 3{,}3\,kg \cdot (0{,}05\,m)^2 - 0{,}000034\,kg - 0{,}3\,kg \cdot (0{,}035\,m)^2 = 0{,}01198\,kg\,m^2$$

$(0{,}035\,m) = \overline{CB} = R_1 - R_2$

2.) Massenträgheitsmoment Signalarm

Gegeben:

- Der dargestellte Signalarm, bestehend aus einem dünnen Stab (Länge l_S = 0,8m, Masse m_S = 12kg) und daran montiertem Zylinderkörper mit mittiger Bohrung (Außenradius R_a = 0,5m, Innenradius R_i = 0,3m, Masse des gebohrten (schraffierten) Teilkörpers m_Z = 20kg);



Gesucht:

Massenträgheitsmoment des Signalarms $J_{ges}^{(A)}$ bezüglich der Drehachse A.

Stab:

$$J_S^{(A)} = J_{S,eig} + J_{S,Stein}^{(A)} = \frac{1}{12} m_S \cdot l_S^2 + m_S \cdot \left(\frac{l_S}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m_S \cdot l_S^2 + \frac{1}{4} m_S l_S^2$$

$$= \frac{1}{3} m_S l_S^2 = \frac{1}{3} \cdot 12{,}0\,kg \cdot (0{,}8\,m)^2 = 2{,}56\,kgm^2$$

Zylinderkörper:

$$J_Z^{(A)} = J_{Z,eig} + J_{Z,Stein}^{(A)} = m_Z \cdot \frac{R_a^2 + R_i^2}{2} + m_Z \cdot (l_S + R_A)^2$$

$$= 20{,}0\,kg \cdot (0{,}17\,m^2 + 1{,}69\,m^2) = 37{,}2\,kgm^2$$

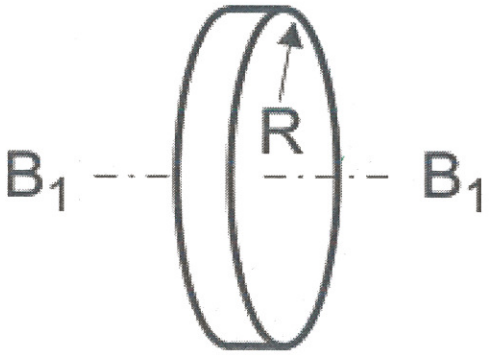
Gesamt:

$$J_{ges}^{(A)} = J_S^{(A)} + J_Z^{(A)} = 39{,}76\,kgm^2$$

3.) Massenträgheitsmoment Kreisscheibe (kurzer Zylinder)
(Zusatzaufgabe zur Übung, nicht klausurrelevant)

Gegeben:

- Kreisscheibe mit konstanter Dicke t, konstanter Dichte ρ und Außenradius R

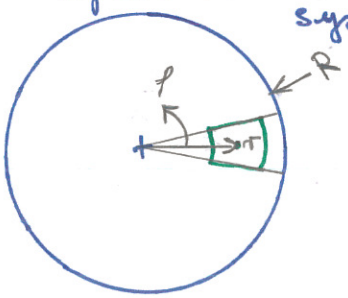


Gesucht:

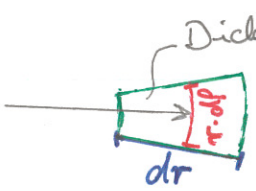
- Massenträgheitsmoment J_{eig} bzgl. der Drehachse (= Symmetrieachse) B_1-B_1 nach dem allgemeinen Integral

$$J = \int_V r^2 \cdot \rho(r)\,\mathrm{d}V$$

Zylinderkoordinaten-system:



Volumen dV eines „Kuchenstücks"



$dV = t \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$

Dichte ρ = konst.

$$\hookrightarrow J = \rho \cdot \int_V r^2\,dV = \rho \cdot t \cdot \int_V r^3\,dr\,d\varphi$$

↳ Integrationsgrenzen: $0 \le r \le R$; $0 \le \varphi \le 2\pi$

Mittelpunkt bis außen — Vollkreis ($\hat{=}\ 0° \to 360°$)

$$\hookrightarrow J = \rho \cdot t \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3\,dr\,d\varphi = \rho \cdot t \cdot \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R d\varphi = \rho \cdot t \cdot \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}R^4\,d\varphi$$

$$= \rho \cdot t \cdot \left[\frac{1}{4}R^4 \cdot \varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\rho \cdot t \cdot 2\pi \cdot R^4 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t \cdot R^2$$

Gesamtmasse:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t$$

$$\hookrightarrow J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$