Blatt 6 -Teil 2

Mittwoch, 12. Februar 2025 21:50

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 1

a) $\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$

b) $\int (x^3 + 2x - 4)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x + c$

c) $\int \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x\right) dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$

d) $\int (e^x + x^2)\,dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$

e) $\int (e^{2x} + 3)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x + c$

f) $\int (2xt^2 + 2xt - 4)\,dt = \frac{2}{3}xt^3 + xt^2 - 4t + c$

g) $\int (\cos(x) - e^{-x} + 1)\,dx = \sin(x) + e^{-x} + x + c$

h) $\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + c$

i) $\int e^{2x+3}\,dt = e^{2x+3}\cdot t + c$

j) $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$

k) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

l) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

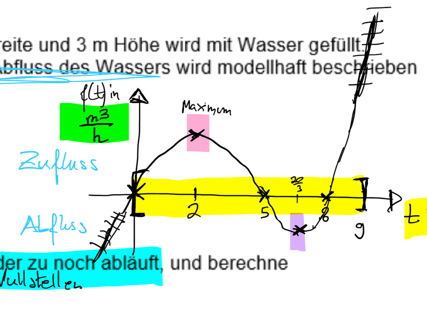
Aufgabe 2

Swimmingpool
Ein quaderförmiger Swimmingpool mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft beschrieben durch die Zulaufratenfunktion mit

≙ Fließgeschwindigkeit   Definitionsbereich

$f(t)=t^3-13t^2+40t; \quad 0\le t\le 9$

(f(t) in m³ pro Stunde, t in Stunden)



b) NS: $t^3-13t^2+40t=0$
$t\cdot(t^2-13t+40)=0$
$t=0$ oder $t^2-13t+40=0$ | PQ
$t_{1,2}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{160}{4}}$
$=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{13}{2}\pm\frac{3}{2}$
$t_1=5$ oder $t_2=8$

a) Gib die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu noch abläuft, und berechne die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses. Nullstellen

b) Skizziere den Graphen der Zulaufratenfunktion f. Nullstellen + Randverhalten ⇒ Skizze

handschriftl. ⇒ c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Pool? $V_3 = V_0 + \int_0^3 f(t)dt$ (Anfangsmenge)

CAS (Computer Algebra System):

d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m^3 beträgt.

c) $V_3 = 8\cdot5\cdot0{,}1 + \int_0^3 (t^3-13t^2+40t)\,dt$
$= 4 + \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^3$
$= 4 + \left(\frac{1}{4}\cdot3^4 - \frac{13}{3}\cdot3^3 + 20\cdot3^2 - (0)\right) = 87{,}25\ m^3$

18:14 Freitag 23. Feb. wolframalpha.com

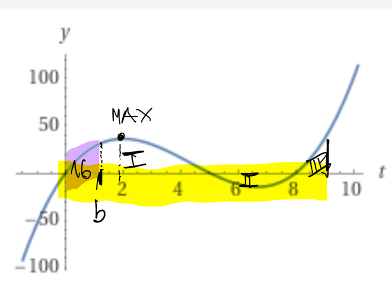
t^3-13t^2+40t

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

Plots



(t from −1.5 to 10.2)

Roots Nullstellen
$t = 0$ h
$t = 5$ h
$t = 8$ h

Local maximum
$\max\{t^3 - 13t^2 + 40t\} = 36$ at $t = 2$

Local minimum
$\min\{t^3 - 13t^2 + 40t\} = -\frac{400}{27}$ at $t = \frac{20}{3}$

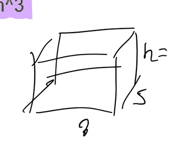
Integrate t^3-13t^2+40t From t=0 to t=5
Definite integral
I: $\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58\ m^3$ Zulauf

Integrate t^3-13t^2+40t From t=5 to t=8
Definite integral
II: $\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = -\frac{117}{4} = -29.25$ Ablauf

Integrate t^3-13t^2+40t From t=8 to t=9
Definite integral
III: $\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = \frac{191}{12} \approx 15.917\ m^3$ Zulauf

CAS (Computer Algebra System)
d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.
e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.
f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist. (die bewegt wurde)
g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m^3 beträgt. ab $t=0$

d) $V_9 = 4 + \int_0^9 f(t)\,dt = 4 + F(9) - \cancel{F(0)} = 105{,}25\ m^3$



$\Rightarrow 8\cdot5\cdot h = 105{,}25$
$h = \frac{105{,}25}{40} = 2{,}63\ m$

e) Nach 5h, einzelnen Flächeninhalte betrachten, da II < III.

f) $V_G = \int_0^5 f(t)dt + \left|\int_5^8 f(t)dt\right| + \int_8^9 f(t)\,dt$

g) Ansatz: $\int_0^b f(t)\,dt = 16 \iff \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^b = 16$

$\underbrace{\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2}_{F(b)} - \underbrace{(0)}_{F(0)} = 16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 = 16 \quad |-16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - 16 = 0$ (Nullstellenproblem)

⇒ nur noch numerisch lösbar (näherungsweise!)

~~$b \approx -0.82118$~~ nicht im Definitionsbereich $[0;9]$

$b \approx 1.0030$ h

⇒ Nach ca. 1 h !

Aufgabe 3

$\int u' \cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$ (Aufgabe)

Berechnen Sie die Integrale durch partielle Integration.

b) $\int x^2 \sin(3x)\,dx$

c) $\int \sin^2(x)dx$

$\sin(x)\cdot\sin(x)$ Tipp: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

a) $\int x\, e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}dx$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

$\left(= e^{2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + c\right)$

b) $\int x^2\cdot\sin(3x)\,dx$

noch immer ein Produkt mit zwei Faktoren in denen x vorkommt
! nochmals partielle Integration

$= -\frac{1}{3}\cos(3x)\cdot x^2 - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\cdot 2x\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) - \left[-\frac{1}{9}\sin(3x)\cdot 2x - \int -\frac{1}{9}\sin(3x)\cdot 2\,dx\right]$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) - \left[-\frac{2}{9}x\sin(3x) - \left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\int\sin(3x)\,dx\right]$

$+\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) - \left[-\frac{2}{9}x\sin(3x) - \frac{2}{27}\cos(3x)\right]$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{9}x\sin(3x) + \frac{2}{27}\cos(3x) + c$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

c) $\int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) - \int -\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$, $(\cos)^2 = 1 - \sin^2 x$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int 1 - \sin^2(x)\,dx$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int 1\,dx - \int\sin^2(x)\,dx$

$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + x - \int\sin^2(x)\,dx$

Betrachte als Gleichung gesamt: $\int\sin^2(x)dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + x - \int\sin^2(x)dx \quad |+\int\sin^2(x)dx$

$2\cdot\int\sin^2(x)dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + x \quad |:2$

$\int\sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot(-\cos(x)\cdot\sin(x) + x) + c$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale durch geeignete Substitutionen.

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(16+2x^2)^3}}$

$\int 3x^2\cdot e^{x^3}\,dx$

a) $\int 3x\cdot\sin(x^2+1)\,dx$

b) $\int \frac{3}{3x+1}\,dx$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Integrale durch Partialbruchzerlegung.

(a) $\int \frac{6x+10}{x^2+2x-3}\,dx$ Siehe Mitschrift!

(b) $\int \frac{3x^5+2x^4+3x^3}{x^4-1}\,dx$

(c)

NS vom Nenner: $x=-1$ doppelt, $x=2$ einfach

$\int \frac{6x^2-4x-7}{x^3-3x-2}\,dx \Rightarrow \frac{6x^2-4x-7}{(x+1)^2\cdot(x-2)} = \frac{A\cdot(x+1)^2}{(x-2)(x+1)^2} + \frac{B\,(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+1)(x-2)} + \frac{C\,(x-2)}{(x+1)^2\cdot(x-2)}$

Nur noch Zähler betrachten und NS einsetzen:

$x=2$: $6\cdot4-8-7 = A(2+1)^2 + \cancel{B\cdot(2+1)\cdot(2-2)} + \cancel{C\cdot(2-2)}$
$9 = 9A$
$\boxed{1=A}$

$x=-1$: $6\cdot(-1)^2+4-7 = \cancel{A(-1+1)^2} + \cancel{B(-1+1)(-1-2)} + C(-1-2)$
$3 = -3\cdot C$
$\boxed{-1=C}$

ZB: $x=1$: $6-4-7 = A\cdot(1+1)^2 + B(1+1)(1-2) + C\cdot(1-2)$
$-5 = 4 - 2B + 1$
$-10 = -2B$
$\boxed{5=B}$

Damit ⇒ $\int\frac{1}{x-2}dx + \int\frac{5}{x+1}dx + \int\frac{-1}{(x+1)^2}dx$
$\ln|x-2| + 5\cdot\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$

$-\int (x+1)^{-2}dx = -(-(x+1)^{-1}) = (x+1)^{-1} = \frac{1}{(x+1)^1}$

Aufgabe 6

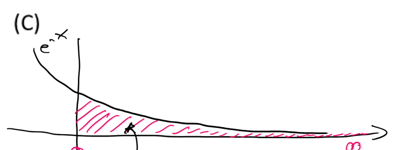
Grenzen sind Unendlich oder "Definitionslücken bzw. -ränder"

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren.

(a) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

(b) $\int_0^1 \ln(2x)\,dx$

(C) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx$



$= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b$

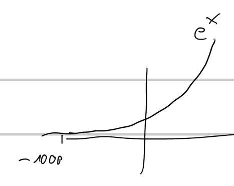
(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} - (-e^{-0})\right)$

$= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} + 1\right) = 1$

$\to 0$

2 konvergiert diese Fläche gegen einen Grenzwert oder geht sie gegen Unendlich



"Fläche abhängig von b"

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Zylinder: $\pi r^2\cdot h = V_Z$

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

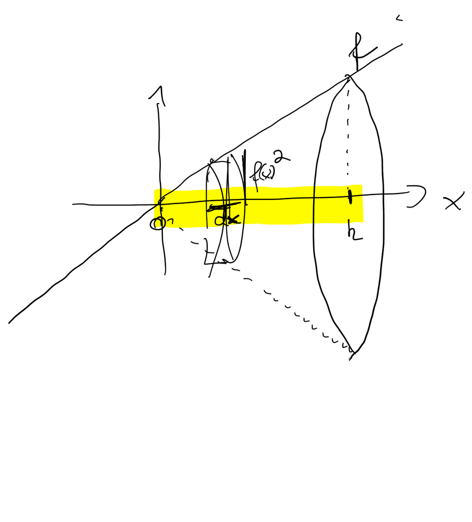
Aufgabe 7

$V = \pi\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx$ ($r^2\cdot h$) Summe vieler schmaler Zylinder

Berechnen Sie das Volumen V der Rotationskörper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen:

(a) $f(x) = \frac{r}{h}x \quad , \quad 0\le x\le h$

(b) $f(x) = 4\sqrt{x} \quad , \quad [0;4]$



a) $V = \pi\cdot\int_0^h \left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2 dx$

$= \pi\cdot\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx$

$= \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\int_0^h x^2\,dx = \pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$

$= \frac{\pi r^2}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{1}{3}h^{\cancel{3}} - \cancel{0}$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = V_{Kegel}$